整関数のグラフ上の格子点の個数

2009 年 10 月
奥村　清志

1　はじめに

n 次関数のグラフが n 個の異なる格子点を通れば，それは無数の格子点を通る。

これは正しいでしょうかと，高校3年の１人の生徒から質問を受けた。彼が言うには，「正しいように思えるのですが，証明がうまくいきません。2 次関数に限定してもなかなか難しいのです」とのこと。

ありふれた問題に思えるが，私にとっても初体験の問題。検討してみた。以下，その結果を記す。

2　一般論としては成立しない

結論を言えば，一般論としては成立しない。反例が簡単に見つかる。たとえば 1 次関数なら，$y=\sqrt{2}\,x$ が反例となる。このグラフは格子点 $(0,0)$ を通るが，それ以外の格子点を通らない。なぜなら，もし $(0,0)$ 以外の格子点 (m,n) を通るとすると，$m\neq 0$ であるから，$n=\sqrt{2}\,m$ より $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに反する。

2 次関数なら，$y=\sqrt{2}\,x(x-1)$ が反例となる。これは 2 個の格子点 $(0,0),(1,0)$ を通るが，それ以外の格子点を通らない。なぜなら，第 3 の格子点 (m,n) を通るとすると，$m\neq 0,1$ であるから，$n=\sqrt{2}\,m(m-1)$ より $\sqrt{2}=\frac{n}{m(m-1)}$ となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに反する。

ではこの問題はまったく無意味かというと，そうとも思えない。条件を少し強めれば，一般に成立する性質となる。しかも，証明がなかなか面白い。それを次に示す。

3　最高次の係数が有理数の場合には成立する

上の問題を次のように書きかえる。

【定理 1】
最高次の係数が有理数である n 次関数のグラフが n 個の異なる格子点を通れば，それは無数の格子点を通る。

これを証明しよう。

(証明)

条件を満たす n 次関数を $y=f(x)$ とする。それが通る n 個の格子点の中に原点が含まれていないときは，格子点の任意の一つを (u,v) とし，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-u$，y 軸方向に $-v$ だけ平行移動する。その関数を $y=g(x)$ とすると，$y=g(x)$ のグラフは原点を通る。しかも，x,y 方向の平行移動量はともに整数だから，$y=f(x)$ 上の格子点はすべて $y=g(x)$ 上でも格子点であり，逆に $y=g(x)$ 上の格子点はすべて $y=f(x)$ 上でも格子点である。また，$f(x)$ と $g(x)$ の最高次の係数は平行移動によって変化しないから，$g(x)$ の最高次の係数は 0 でない有理数のままである。

このように考えると，$y=f(x)$ は始めから原点を通る (定数項が 0 である) ものと仮定しておき，それが原点以外の $n-1$ 個の異なる格子点を通るなら，それは無数の格子点を通る，ということを示せばよいことになる。

$f(x)$ が 1 次関数のときは，それを $y=ax$ (ただし，$a=\frac{p}{q}$ ； p,q は整数) とすると，x が q の倍数である限り y は整数となるから，これは無数の格子点を通る。

そこで，$f(x)$ を2次以上の関数とし，$(0, 0)$ 以外の $n-1$ 個の格子点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ とする。$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx$（$a$ は0でない有理数）とおくと，次の式が成り立つ。

$$y_1 = a{x_1}^n + b{x_1}^{n-1} + c{x_1}^{n-2} + \cdots + dx_1$$
$$y_2 = a{x_2}^n + b{x_2}^{n-1} + c{x_2}^{n-2} + \cdots + dx_2$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} = a{x_{n-1}}^n + b{x_{n-1}}^{n-1} + c{x_{n-1}}^{n-2} + \cdots + dx_{n-1}$$

これを次のように書きかえる。

$$b{x_1}^{n-1} + c{x_1}^{n-2} + \cdots + dx_1 = y_1 - a{x_1}^n$$
$$b{x_2}^{n-1} + c{x_2}^{n-2} + \cdots + dx_2 = y_2 - a{x_2}^n$$
$$\vdots$$
$$b{x_{n-1}}^{n-1} + c{x_{n-1}}^{n-2} + \cdots + dx_{n-1} = y_{n-1} - a{x_{n-1}}^n$$

さらに，行列を用いて表現すると，

$$\begin{pmatrix} {x_1}^{n-1} & {x_1}^{n-2} & \cdots & x_1 \\ {x_2}^{n-1} & {x_2}^{n-2} & \cdots & x_2 \\ & & \vdots & \\ {x_{n-1}}^{n-1} & {x_{n-1}}^{n-2} & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - a{x_1}^n \\ y_2 - a{x_2}^n \\ \vdots \\ y_{n-1} - a{x_{n-1}}^n \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1) の左辺の $n-1$ 次正方行列を A と表すことにすると，A は正則行列である（逆行列をもつ）。なぜなら，もし A が正則行列でないとすると，A の $n-1$ 個の列ベクトルは1次独立ではないから，

$$p\begin{pmatrix} {x_1}^{n-1} \\ {x_2}^{n-1} \\ \vdots \\ {x_{n-1}}^{n-1} \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} {x_1}^{n-2} \\ {x_2}^{n-2} \\ \vdots \\ {x_{n-1}}^{n-2} \end{pmatrix} + \cdots + r\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる実数 $p, q, \cdots r$（少なくとも1つは0でない）が存在する。$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ はいずれも0でないから，上の式は

$$p\begin{pmatrix} {x_1}^{n-2} \\ {x_2}^{n-2} \\ \vdots \\ {x_{n-1}}^{n-2} \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} {x_1}^{n-3} \\ {x_2}^{n-3} \\ \vdots \\ {x_{n-1}}^{n-3} \end{pmatrix} + \cdots + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値である。この式は，$n-2$ 次以下の方程式

$$px^{n-2} + qx^{n-3} + \cdots + r = 0 \qquad \text{（係数の少なくとも1つは0でない）}$$

が異なる $n-1$ 個の解 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ をもつことを意味していて，代数学の基本定理に反する。よって，A は正則行列である。すなわち，A^{-1} が存在する。故に，(1) は

$$\begin{pmatrix} b \\ c \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 - a{x_1}^n \\ y_2 - a{x_2}^n \\ \vdots \\ y_{n-1} - a{x_{n-1}}^n \end{pmatrix} \tag{2}$$

と表される。A の各成分は整数だから，A^{-1} の各成分は有理数である。また，(2) の右辺の列ベクトルも，a が有理数であることより，すべて有理数である。したがって，(2) より，$b, c, \cdots, d$ はすべて有理数である。すなわち，$f(x)$ の係数はすべて有理数である。

そこで，$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx$ の各係数を分数で表したとし，すべての分母の最小公倍数

を N とすると，整数 x が N の倍数である限り，$f(x)$ は整数となる。

これで，$y=f(x)$ が無数の格子点を通ることが示された。 Q.E.D.

4 考察

定理 1 を少し一般化して，

少なくとも 1 つの係数が 0 以外の有理数である n 次関数のグラフが n 個の異なる格子点を通れば，それは無数の格子点を通る。

は成立するであろうか。これは，最初に挙げた反例を少し変形するだけで，成立しないことがわかる。すなわち，

$$y=\sqrt{2}\,x+1,\quad y=\sqrt{2}\,x(x-1)+1$$

などが反例となる。それでは，

定数項以外の少なくとも 1 つの係数が 0 以外の有理数である n 次関数のグラフが n 個の異なる格子点を通れば，それは無数の格子点を通る。

はどうであろうか。これも，たとえば $f(x)=\sqrt{2}\,x^3+x^2-\sqrt{2}\,x$ のような反例があって，成立しない。実際，この関数は $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ の 3 個の格子点を通るが，それ以外の格子点を通らないことが容易に示せる。

このように，最高次の係数が有理数であることが，定理が成り立つ絶対条件である。

定理 1 を少し変形した次の定理 2 は成立する。

【定理 2】
n 次関数のグラフが $n+1$ 個の異なる格子点を通れば，それは無数の格子点を通る。

$n+1$ 個の格子点を与えれば，n 次関数は確定するが，それが無数の格子点を通るかどうかは，検討の余地がある。定理を証明しよう。

(証明)

条件を満たす n 次関数を $y=f(x)$ とする。定理 1 の証明と同様に，$y=f(x)$ は始めから原点を通るものとしてよい (つまり，定数項は 0 としてよい)。そこで，

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+dx$$

とする。これが原点以外の n 個の格子点 $(x_1,\,y_1)$, $(x_2,\,y_2)$, $\cdots$, $(x_n,\,y_n)$ を通るとする。そのとき，

$$\begin{aligned}
&a{x_1}^n+b{x_1}^{n-1}+\cdots+dx_1=y_1\\
&a{x_2}^n+b{x_2}^{n-1}+\cdots+dx_2=y_2\\
&\qquad\vdots\\
&a{x_n}^n+b{x_n}^{n-1}+\cdots+dx_n=y_n
\end{aligned}$$

が成り立つ。行列を用いれば，

$$\begin{pmatrix} {x_1}^n & {x_1}^{n-1} & \cdots & x_1 \\ {x_2}^n & {x_2}^{n-1} & \cdots & x_2 \\ & & \vdots & \\ {x_n}^n & {x_n}^{n-1} & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。x_1, x_2, $\cdots$, x_n はいずれも 0 ではないから，定理 1 の証明と同様，左辺の n 次正方行列 (A とする) は正則行列である。故に，(3) は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

と表せる。(4) の右辺の行列および列ベクトルの成分はすべて有理数だから，左辺の $a, b, \cdots, d$ はすべて有理数である。これで，定理 1 と同様，$y = f(x)$ は無数の格子点を通ることが示された。 Q.E.D.